On the minimum variance unbiased estimation (A Bayesian Approach to Statistical Inference and Its Related Topics)

AUTHOR(S):

Kim, Hyo Gyeong; 赤平, 昌文

CITATION:

Kim, Hyo Gyeong ...[et al]. On the minimum variance unbiased estimation (A Bayesian Approach to Statistical Inference and Its Related Topics). 数理解析研究所講究録 2009, 1621: 29-41

ISSUE DATE:

2009-01

URL:

http://hdl.handle.net/2433/140241

数理解析研究所講究録
第 1621 巻 2009 年 29-41

On the minimum variance unbiased estimation

筑波大・数理物質 Kim Hyo Gyeong
(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)
筑波大・数理物質 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)
(Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

1. はじめに

統計的推測において，母集団分布の母数の推定問題は重要である．最小分散性の観点からは Cramér-Rao の不等式による不偏推定量の分散の下界が Fisher 情報量の逆数で与えられ，これを θ について一様に達成する不偏推定量が一様最小分散不偏 (uniformly minimum variance unbiased, 略して UMVU) 推定量になる．一方，完備十分統計量が存在する場合には，それに基づく不偏推定量が UMVU 推定量になる ([LC98])．そこで，本稿においては，まず，位置母数の推定問題において，最良位置共変推定量 (Pitman 推定量), UMVU 推定量について考える ([T94])．次に，指数型分布族の場合に，母数の関数の UMVU 推定量の構成について，Jani and Dave[JD90] に従って考え，そこでは取り挙げられていない具体的な例についても考える．さらに，統計量の分布に条件を課して，不偏推定量を求める方法による UMVU 推定量の構成についても考察する．

2. 位置母数の最小分散推定

まず，$X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に，いずれも確率密度関数 (p.d.f.) $p(x,\theta)$ に従う確率変数とし，$\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ とする．ただし，$\theta \in \Theta = \boldsymbol{R}^1$ とする．ここで，θ を位置母数，すなわち $p(x,\theta) = p_0(x-\theta)$ とし，$E_\theta(X_1) = \theta$, $V_\theta(X_1) = \sigma^2 < \infty$ と仮定する．このとき，θ の位置共変推定量全体のクラスの中で平均 2 乗誤差を一様に最小にする推定量は

$$\hat{\theta}_{PT} := X_1 - E_0(X_1 | X_2 - X_1, \cdots, X_n - X_1)$$

となり，これを θ の最良位置共変推定量または Pitman 推定量という．また，

$$\hat{\theta}_{PT} = \int_{-\infty}^{\infty} \theta \prod_{i=1}^{n} f(X_i - \theta) d\theta \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} f(X_i - \theta) d\theta$$

とも表され，これは，2 乗損失と一般一様分布に関する一般 Bayes 推定量にもなっている．このとき，以下のことが知られている ([T94])．

例 2.1 $X_1, \cdots, X_n$ が互いに独立に，いずれも一様分布 $U(\theta - (1/2), \theta + (1/2))$ に従う確率変数とすれば，Pitman 推定量は $\hat{\theta}_{PT} = (\min_{1 \le i \le n} X_i + \max_{1 \le i \le n} X_i)/2$ となる．

p.d.f. p_0 をもつ分布が正規分布のとき，Pitman 推定量 $\hat{\theta}_{PT}$ は標本平均となり，一様最小分散不偏 (UMVU) 推定量になることが知られているが，その分布が正規分布でないときは，$\hat{\theta}_{PT}$ は，位置共変推定量全体のクラスの中では最小分散不偏推定量であるが，一般に UMVU 推定量にはならない．すなわち，特定の $\theta = \theta_0$ を固定すると，

$$V_{\theta_0}(\hat{\theta}_{PT}) > V_{\theta_0}(\hat{\theta}_0)$$

となる不偏推定量 $\hat{\theta}_0$ が存在する．いま，$\bar{X} := (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$ とし，$n \geq 2$ について

$$Y_1 := (X_1 - X_2)/\sqrt{2}, \quad Y_2 := (X_1 + X_2 - 2X_3)/\sqrt{6}, \cdots,$$
$$Y_{n-1} := \{X_1 + \cdots + X_{n-1} - (n-1)X_n\}/\sqrt{n(n-1)}$$

とすると，各 $i = 1, \cdots, n-1$ について

$$E(Y_i) = 0, \quad V(Y_i) = \sigma^2, \quad Cov(\bar{X}, Y_i) = 0$$

となり，任意の $i, j (i \neq j)$ について $Cov(Y_i, Y_j) = 0$ となる．このとき、Pitman 推定量 $\hat{\theta}_{PT}$ は

$$\hat{\theta}_{PT} = \bar{X} - E_0(\bar{X}|Y_1, \cdots, Y_{n-1})$$

と表すことができる．

定理 2.1 $Y_1, \cdots, Y_{n-1}$ を与えたときの $\bar{X}$ の条件つき分散

$$V(\bar{X}|Y_1, \cdots, Y_{n-1})$$

が一定でないならば，$\hat{\theta}_{PT}$ は UMVU 推定量にならない．

例 2.1 の Pitman 推定量は UMVU 推定量にならない．

定理 2.2 $\hat{\theta}^*$ が θ の UMVU 推定量であるならば，$\hat{\theta}^*$ は Pitman 推定量 $\hat{\theta}_{PT}$ に一致する．

なお，p.d.f. p_0 をもつ分布が正規分布以外の多くの分布について，Pitman 推定量を具体的に求めると，定理 2.1 の条件つき分散が一定でないことが分かり，それが UMVU 推定量にならないことが示される．

UMVU 推定量が存在しない場合，特定の $\theta = \theta_0$ の値に対応する分散を最小にするような不偏推定量を，$\theta = \theta_0$ のおける局所最小分散不偏 (LMVU) 推定量という．例えば，例 2.1 においては，

$$\hat{\theta}_0 = \left[X_1 - \theta_0 + \frac{1}{2}\right] + \theta_0$$

は θ の LMVU 推定量である．ただし，$[\cdot]$ はガウス記号とする．

3．1母数指数型分布族の場合のUMVU推定量の構成法I

まず，Jani and Dave[JD90]に従って，指数型分布族のときに，母数の関数のUMVU推定量について考える．いま，p.d.f.

$$f(x,\theta)=a(x)b(\theta)\exp[C(\theta)d(x)] \quad (x\in T\subseteq \boldsymbol{R}^1,\ \theta\in\Theta\subset\boldsymbol{R}^1) \tag{3.1}$$

をもつ分布を1母数指数型分布族に属するという．ただし，

$$a(x)>0,\quad 1/b(\theta)=\int_{x\in T}a(x)\exp\{C(\theta)d(x)\}dx$$

とする．また，fは次のように表せる．

$$\begin{aligned} f(x,\theta)&=\frac{a(x)[h(\theta)]^{d(x)}}{g(\theta)} \quad (x\in T\subseteq \boldsymbol{R}^1,\ \theta\in\Theta\subset\boldsymbol{R}^1),\\ h(\theta)&:=\exp[C(\theta)],\ g(\theta):=\int_{x\in T}a(x)h(\theta)^{d(x)}dx. \end{aligned} \tag{3.2}$$

いま，$X_1,\cdots,X_n$を(3.2)のp.d.f.をもつ分布からの無作為標本とすると，$Z:=\sum_{i=1}^n d(X_i)$がθに対する完備十分統計量になる．このとき，Zの分布は，また，指数型分布族に属し，そのp.d.f.は

$$f_Z(z,\theta)=\frac{B(z,n)[h(\theta)]^z}{(g(\theta))^n} \qquad (z\in T(n)\subseteq \boldsymbol{R}^1,\ \theta\in\Theta\subset\boldsymbol{R}^1) \tag{3.3}$$

となる．ただし，$B(z,n)$は

$$(g(\theta))^n=\int_{z\in T(n)}B(z,n)(h(\theta))^z dz$$

を満たすものとする．

次に，$T(n)=(0,\infty)$とする．このとき，次の補題において，θの関数$\phi(\theta)$のUMVU推定量が存在するための必要十分条件を得る([JD90])．

補題 3.1 確率変数Zが(3.3)のp.d.f.f_Zをもつ指数型分布族に従うとする．このとき，$\phi(\theta)$のUMVU推定量が存在するための必要十分条件は

$$\phi(\theta)(g(\theta))^n=\int_0^\infty C(z,n)(h(\theta))^z dz$$

と表現されることである．

次の定理，系においてUMVU推定量が与えられる([JD90])．

定理 3.1 確率変数Zが(3.3)のp.d.f.f_Zをもつ指数型分布族に従うとする．このとき，$k>0$について

$$H_k(Z,n):=\begin{cases} B(Z-k,n)/B(Z,n) & (Z>k),\\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{3.4}$$

は $(h(\theta))^k$ の UMVU 推定量である．

系 3.1 $H_k(z,n)$ の分散の UMVU 推定量は次のように与えられる．

$$\hat{V}(H_k(z,n)) = H_k^2(z,n) - H_{2k}(z,n) \quad (z > 2k). \tag{3.5}$$

定理 3.2 確率変数 Z が (3.3) の p.d.f.f_Z をもつ指数型分布族に従うとする．このとき，$k \geq 1-n$ について

$$G_k(Z,n) := \frac{B(Z,n+k)}{B(Z,n)} \tag{3.6}$$

は $(g(\theta))^k$ の UMVU 推定量である．

上記の定理を用いて，[JD90] では挙げられていないいくつかの例を与える．

例 3.1 $X_1, \cdots, X_n$ が互いに独立に，いずれも p.d.f.

$$f(x,\theta) = \frac{x}{\theta}\exp\left(-\frac{x^2}{2\theta}\right) \quad (x > 0;\ \theta > 0)$$

をもつ Rayleigh 分布に従う確率変数とする．ここで

$$a(x) = 1,\ h(\theta) = \exp\left(-\frac{1}{2\theta}\right),\ g(\theta) = \theta,\ d(x) = x^2$$

とすれば，(3.2) よりこの $f(x,\theta)$ を p.d.f. としてもつ分布は指数型分布族に属する．このとき，$Z = \sum_{i=1}^n X_i^2$ は θ に対する完備十分統計量であり，その p.d.f. は

$$\begin{aligned} f_Z(z,\theta) &= \frac{B(z,n)(h(\theta))^z}{(g(\theta))^n} \\ &= \frac{1}{\theta^n}\exp\left(-\frac{z}{2\theta}\right)B(z,n) \quad (z > 0) \end{aligned}$$

になる．ただし，$(g(\theta))^n = \int_0^\infty B(z,n)e^{-z/(2\theta)}dz$ とする．

一方，VN[93] の p.388 によれば，Z の p.d.f. は

$$f_Z(z,\theta) = \frac{z^{n-1}}{(2\theta)^n\Gamma(n)}e^{-z/(2\theta)} = \frac{1}{2^n\theta^n}\frac{z^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{-z/(2\theta)} \quad (z > 0)$$

である．したがって，$B(z,n) = z^{n-1}/\{2^n\Gamma(n)\}$ $(z \geq 0)$ となるから，定理3.1 より $(h(\theta))^k = e^{-z/(2\theta)}$ の UMVU 推定量は

$$\begin{aligned} H_k(Z,n) &= \begin{cases} \frac{B(Z-k,n)}{B(Z,n)} = \frac{(Z-k)^{n-1}}{Z^{n-1}} & (Z \geq k), \\ 0 & (Z < k) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(1-\frac{k}{Z}\right)^{n-1} & (Z \geq k), \\ 0 & (Z < k) \end{cases} \end{aligned}$$

になる．ただし，$k>0$ とする．また，定理 3.2 により，$(g(\theta))^k=\theta^k$ の UMVU 推定量は

$$G_k(Z,n)=\frac{B(Z,n+k)}{B(Z,n)}=\frac{Z^{n+k-1}}{2^{n+k}\Gamma(n+k)}\bigg/\frac{Z^{n-1}}{2^n\Gamma(n)}=\frac{Z^k\Gamma(n)}{2^k\Gamma(n+k)}$$

になる．ただし，$k\geq 1-n$ とする．

例 3.2 $X_1,\cdots,X_n$ が互いに独立に，いずれも p.d.f.

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}\exp\left(x-\frac{e^x-1}{\theta}\right)\quad(x>0;\ \theta>0)$$

をもつ極値分布に従う確率変数とすると，

$$f(x,\theta)=e^x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{e^x-1}{\theta}}=e^x\frac{1}{\theta}\left(e^{-\frac{1}{\theta}}\right)^{e^x-1}$$

となり，ここで

$$a(x)=e^x,\ h(\theta)=e^{-\frac{1}{\theta}},\ g(\theta)=\theta,\ d(x)=e^x-1$$

とすれば，(3.2) よりこの $f(x,\theta)$ を p.d.f. としてもつ分布は指数型分布族に属する．このとき，$Z=\sum_{i=1}^n(e^{X_i}-1)$ は θ に対する完備十分統計量であり，その p.d.f. は

$$f_Z(z,\theta)=\frac{B(z,n)(h(\theta))^z}{(g(\theta))^n}=\frac{1}{\theta^n}e^{-(z/\theta)}B(z,n)\quad(z>0)$$

になる．ただし，$(g(\theta))^n=\int_0^\infty B(z,n)e^{-(z/\theta)}dz$ とする．

一方，VN[93] の p.433 によれば，Z の p.d.f. は

$$f_Z(z,\theta)=\frac{1}{\Gamma(n)\theta^n}z^{n-1}e^{-z/\theta}\quad(z>0)$$

である．したがって，$B(z,n)=z^{n-1}/\Gamma(n)\ (z>0)$ となる．よって，定理 3.1 より $(h(\theta))^k=e^{k/\theta}$ の UMVU 推定量は

$$H_k(Z,n)=\begin{cases}\frac{B(Z-k,n)}{B(Z,n)}=\frac{(Z-k)^{n-1}}{Z^{n-1}} & (Z>k),\\ 0 & (Z\leq k)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\left(1-\frac{k}{Z}\right)^{n-1} & (Z>k),\\ 0 & (Z\leq k)\end{cases}$$

になる．ただし，$k>0$ とする．また，定理 3.2 により，$(g(\theta))^k=\theta^k$ の UMVU 推定量は

$$G_k(Z,n)=\frac{B(Z,n+k)}{B(Z,n)}=\frac{Z^{n+k-1}}{\Gamma(n+k)}\bigg/\frac{Z^{n-1}}{\Gamma(n)}=\frac{Z^k\Gamma(n)}{\Gamma(n+k)}$$

になる．ただし，$k\geq 1-n$ とする．

4. 1 母数指数型分布族の場合の UMVU 推定量の構成法 II

確率ベクトル $\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ に基づく統計量を $T = T(\boldsymbol{X})$ とし，その値域を区間 (a, b) とする．ただし，a は $-\infty$, b は ∞ の場合を含むとする．いま，T の (Lebesgue 測度に関する)p.d.f. を

$$f_T(t, \theta) = B_n(t)\{\psi_n(\theta)\}^{-1} e^{h_n(\theta)t} \chi_{(a,b)}(t), \quad t \in (a, b);\ \theta \in \Theta$$

とする．ただし，$B_n(t)$ は (a, b) 上の k 回微分可能関数で $B_n(t) > 0$ $(t \in (a, b))$, $\psi_n(\theta) > 0$, h_n は実数値関数で $h_n(\theta) \not\equiv 0$ とする．ここで，k を自然数として次の条件を仮定する．

(C1) 各 $j = 0, 1, \cdots, k-1$ について

$$\lim_{t \to a+0} B_n^{(j)}(t) e^{h_n(\theta)t} = 0, \quad \lim_{t \to b-0} B_n^{(j)}(t) e^{h_n(\theta)t} = 0$$

である．ただし，各 $j = 1, \cdots, k-1$ について $B_n^{(j)}(t) = (d^j/dt^j)B_n(t)$ とし，$B_n^{(0)}(t) = B_n(t)$ とする．

このとき，次の定理が成り立つ．

定理 4.1 条件 (C1) の下で

$$\hat{h}_{k,n}(T) := (-1)^k \frac{B_n^{(k)}(T)}{B_n(T)} \chi_{(a,b)}(T)$$

は，$\{h_n(\theta)\}^k$ の不偏推定量である．

証明 部分積分をし，条件 (C1) を用いると，各 n と各 $\theta \in \Theta$ について

$$\begin{aligned} E_\theta[\hat{h}_{k,n}(T)] &= E_\theta\left[(-1)^k \frac{B_n^{(k)}(T)}{B_n(T)} \chi_{(a,b)}(T)\right] \\ &= (-1)^k \{\psi_n(\theta)\}^{-1} \int_a^b B_n^{(k)} e^{h_n(\theta)t} dt \end{aligned} \tag{4.1}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} J_{n,k}(\theta) &:= \int_a^b B_n^{(k)}(t) e^{h_n(\theta)t} dt \\ &= [B_n^{(k-1)}(t) e^{h_n(\theta)t}]_a^b - \int_a^b B_n^{(k-1)}(t) h_n(\theta) e^{h_n(\theta)t} dt \\ &= -h_n(\theta) J_{n,k-1}(\theta) \\ &= (-1)^k \{h_n(\theta)\}^k J_{n,0}(\theta) \\ &= (-1)^k \{h_n(\theta)\}^k \int_a^b B_n(t) e^{h_n(\theta)t} dt \end{aligned}$$

となる．よって (4.1) から

$$\begin{aligned} E_\theta[\hat{h}_{k,n}(T)] &= \{\psi_n(\theta)\}^{-1}\{h_n(\theta)\}^k \int_a^b B_n(t)e^{h_n(\theta)t}dt \\ &= \{h_n(\theta)\}^k \end{aligned}$$

となる．ゆえに $\hat{h}_{k,n}(T)$ は $\{h_n(\theta)\}^k$ の不偏推定量になる．□

注意 上記で $k=1$ の場合には，鈴木 [S00] において論じられ，多母数の場合へ拡張されている．

系 4.1 統計量 T が完備十分統計量であるならば，$\hat{h}_{k,n}(T)$ は $\{h(\theta)\}^k$ の UMVU 推定量である．

例 4.1 $X_1,\cdots,X_n$ をたがいに独立に，いずれも正規分布 $N(\theta,\sigma_0^2)$ に従う確率変数とする．ただし，σ_0^2 は既知とする．いま，統計量 $T:=\bar{X}$ は $N(\theta,\sigma_0^2/n)$ に従うから，T の p.d.f. は

$$f_T(t,\theta) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left(-\frac{n\theta^2}{2\sigma_0^2}\right)\exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma_0^2}\right)\exp\left(\frac{n\theta}{\sigma_0^2}t\right)$$

となる．ここで，

$$h_n(\theta) = \frac{n\theta}{\sigma_o^2}, \quad B_n(t) = \exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

とすれば，

$$\begin{aligned} B_n'(t) &= -\frac{nt}{\sigma_0^2}\exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ B_n^{(2)}(t) &= \left(-\frac{n}{\sigma_0^2}+\frac{n^2t^2}{\sigma_0^4}\right)\exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ B_n^{(3)}(t) &= \left(\frac{3n^2t}{\sigma_0^4}-\frac{n^3t^3}{\sigma_0^6}\right)\exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma_0^2}\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

となる．このとき，

$$\lim_{t\to\pm\infty} B_n^{(j)}(t)e^{h_n(\theta)t} = \lim_{t\to\pm\infty} P_{j,n}(t)\exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma_0^2}+\frac{n\theta t}{\sigma_0^2}\right) = 0 \quad (j=0,1,\cdots,k-1)$$

となり，条件 (C1) は満たされる．ただし，各 $j=0,1,\cdots,k-1$ について $P_{j,n}(t)$ は t の j 次多項式とする．また，T は完備十分統計量であるから，系 4.1 より $\hat{h}_{k,n}(T)$ は $\{h_n(\theta)\}^k = (n\theta/\sigma_0^2)^k$ の UMVU 推定量になる．例えば，$k=3$ の場合，

$$\hat{h}_{3,n}(T) = -\frac{3n^2T}{\sigma_0^4}+\frac{n^3T^3}{\sigma_0^6}$$

は $\{h_n(\theta)\}^3 = (n\theta)^3/\sigma_0^6$ の UMVU 推定量になる．

例 4.2 $X_1, \cdots, X_n$ がたがいに独立に，いずれも正規分布 $N(0,\theta)$ $(\theta > 0)$ に従う確率変数とする．ただし，$n \geq 3$ とする．このとき，統計量 $T := \Sigma_{i=1}^n X_i^2$ の p.d.f. は

$$f_T(t,\theta) = \begin{cases} \frac{t^{(n/2)-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \frac{e^{-t/(2\theta)}}{\theta^{n/2}} & (t > 0), \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

となるから，

$$h_n(\theta) = -\frac{1}{2\theta}, \quad B_n(t) = t^{(n/2)-1}$$

とすれば，

$$B_n^{(k)}(t) = \left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-k\right) t^{(n/2)-(k+1)}$$

となり，$k < (n/2) - 1$ となる自然数 k について

$$\lim_{t\to 0} B_n^{(j)}(t) e^{h_n(\theta)t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-j\right) t^{(n/2)-(j+1)} e^{-t/(2\theta)} = 0 \quad (0 \leq j \leq k),$$
$$\lim_{t\to\infty} B_n^{(j)}(t) e^{h_n(\theta)t} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-j\right) t^{(n/2)-(j+1)} e^{-t/(2\theta)} = 0 \quad (0 \leq j \leq k)$$

より条件 (A) は満たされる．また，T は完備十分統計量であるから系 4.1 より

$$h_{k,n}(T) = (-1)^k \left(\frac{n}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-k\right) T^{-k} \chi_{(0,\infty)}(T)$$

は $\{h_n(\theta)\}^k = (-1)^k (2\theta)^{-k}$ の UMVU 推定量になる．

例 4.3 $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に，いずれも平均 θ をもつ指数分布 $\mathrm{Exp}(\theta)$ に従う確率変数とする．このとき，統計量 $T := \Sigma_{i=1}^n X_i$ の p.d.f. は

$$f_T(t,\theta) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)\theta^n} e^{-t/\theta} & (t > 0), \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

となるから，

$$h_n(\theta) = -\frac{1}{\theta}, \quad B_n(t) = t^{n-1}$$

とすれば，

$$B_n^{(k)}(t) = (n-1)(n-2)\cdots(n-k)t^{n-k-1}$$

となり，$k < n - 1$ となる自然数 k について

$$\lim_{t\to 0} B_n^{(j)}(t) e^{h_n(\theta)t} = \lim_{t\to 0} t^{n-j-1} e^{-t/\theta} = 0 \quad (0 \leq j \leq k),$$
$$\lim_{t\to\infty} B_n^{(j)}(t) e^{h_n(\theta)t} = \lim_{t\to\infty} t^{n-j-1} e^{-t/\theta} = 0 \quad (0 \leq j \leq k)$$

となって条件 (A) は満たされる．また，T は完備十分統計量であるから系 4.1 より

$$\hat{h}_{k,n}(T) = (-1)^k(n-1)\cdots(n-k)T^{-k}\chi_{(0,\infty)}(T)$$

は $\{h_n(\theta)\}^k = (-1)^k\theta^{-k}$ の UMVU 推定量になる．

5．2 母数指数型分布族の場合の UMVU 推定量の構成法

確率ベクトル $\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ に基づく 2 つの統計量を $T_1 = T_1(\boldsymbol{X}), T_2 = T_2(\boldsymbol{X})$ とし，また $T := (T_1, T_2)$ の値域を $\mathcal{T} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ とし，a_1, a_2 は $-\infty$, b_1, b_2 は ∞ の場合を含むとする．いま，T の (Lebesgue 測度に関する)p.d.f. を

$$\begin{aligned} f_T(t,\theta) = B_n(t)\{\psi_n(\theta)\}^{-1}[\exp\{&c_{11}(\theta)t_1^2 + c_{12}(\theta)t_1t_2 + c_{22}(\theta)t_2^2 \\ &+ c_{10}(\theta)t_1 + c_{01}(\theta)t_2 + c_{00}(\theta)\}]\chi_{\mathcal{T}}(t), \\ &t := (t_1, t_2) \in \mathcal{T};\ \theta := (\theta_1, \theta_2) \in \Theta \subset \boldsymbol{R}^2 \end{aligned}$$

とする．ただし，$B_n(t)$ は $\mathcal{T}$ 上の微分可能関数で $B_n(t) > 0$ $(t \in \mathcal{T})$, $\psi_n(\theta) > 0$ とし，$c_{11}(\theta)$, $c_{12}(\theta)$, $c_{22}(\theta)$, $c_{10}(\theta)$, $c_{01}(\theta)$, $c_{00}(\theta)$ は定数とする．ここで

$$\begin{aligned} A_\theta(t) &:= c_{11}(\theta)t_1^2 + c_{12}(\theta)t_1t_2 + c_{22}(\theta)t_2^2 + c_{10}(\theta)t_1 + c_{01}(\theta)t_2 + c_{00}(\theta), \\ B_n^{(0,1)}(t) &:= \frac{\partial}{\partial t_2}B_n(t) \end{aligned}$$

として，次の条件を仮定する．
(C2) 各 $\theta \in \Theta$ と各 $t_1 \in (a_1, b_1)$ について

$$\lim_{t_2 \to a_2+0} B_n(t)\exp\{A_\theta(t)\} = 0, \quad \lim_{t_2 \to b_2-0} B_n(t)\exp\{A_\theta(t)\} = 0.$$

このとき，次の定理を得る．
定理 5.1 条件 (C2) の下で

$$E_\theta\left[\frac{B_n^{(0,1)}(T)}{B_n(T)}\right] = -c_{12}(\theta)E_\theta(T_1) - 2c_{22}(\theta)E_\theta(T_2) - c_{01}(\theta) \tag{5.1}$$

が成り立つ．
証明 条件 (C2) より

$$\begin{aligned} E_\theta\left[\frac{B_n^{(0,1)}(T)}{B_n(T)}\right] &= \{\psi_n(\theta)\}^{-1}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\left\{\frac{\partial}{\partial t_2}B_n(t)\right\}\exp\{A_\theta(t)\}dt_2dt_1 \\ = \{\psi_n(\theta)\}^{-1}&\left(\int_{a_1}^{b_1}[B_n(t)\exp A_\theta(t)]_{t_2=a_2}^{t_2=b_2}dt_1\right. \\ &\left.- \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}B_n(t)\left\{\frac{\partial}{\partial t_2}A_\theta(t)\right\}\exp\{A_\theta(t)\}dt_2dt_1\right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$= -\{\psi_n(\theta)\}^{-1}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} B_n(t)\{c_{12}(\theta)t_1 + 2c_{22}(\theta)t_2 + c_{01}(\theta)\}\exp\{A_\theta(t)\}dt_2dt_1$$
$$= -c_{12}(\theta)E_\theta(T_1) - 2c_{22}(\theta)E_\theta(T_2) - c_{01}(\theta)$$

になる．□

例 5.1 $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に，いずれも正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数とする．ただし，$n \geq 4$ とする．このとき

$$T_1 = \bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad T_2 = S^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

とすると，$T = (T_1, T_2)$ の同時確率密度関数 (j.p.d.f) は

$$f_T(t,\theta) = \frac{n^{3/2}t_2^{(n-3)/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma((n-1)/2)(2\sigma^2)^{n/2}}\exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}\{(t_1-\mu)^2 + t_2\}\right],$$
$$t = (t_1, t_2) \in \boldsymbol{R}^1 \times \boldsymbol{R}_+;\ \theta := (\mu, \sigma^2) \in \boldsymbol{R}^1 \times \boldsymbol{R}_+$$

になる．ただし，$\boldsymbol{R}_+ = (0, \infty)$ とする．いま，

$$c_{01}(\theta) = -\frac{n}{2\sigma^2}, \quad c_{12}(\theta) = c_{22}(\theta) = 0$$

となり，

$$E_\theta(T_1) = \mu, \quad E_\theta(T_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2$$

になる．また，

$$B_n(t) = t_2^{(n-3)/2}$$

であるから，各 $\theta \in \Theta$ と各 $t_1 \in \boldsymbol{R}^1$ について

$$\lim_{t_2 \to 0+0} B_n(t)\exp\{A_\theta(t)\} = \lim_{t_2 \to 0+0} t_2^{(n-3)/2}\exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}\{(t_1-\mu)^2 + t_2\}\right] = 0,$$
$$\lim_{t_2 \to \infty} B_n(t)\exp\{A_\theta(t)\} = 0$$

となり，条件 (C2) が成り立つ．よって，定理 5.1 より

$$E_\theta\left[\frac{B_n^{(0,1)}(T)}{B_n(T)}\right] = \frac{n}{2\sigma^2} \tag{5.3}$$

になる．一方，

$$B_n^{(0,1)}(t) = \frac{\partial}{\partial t_2}B_n(t) = \frac{n-3}{2}t_2^{(n-5)/2}$$

となるから

$$\frac{B_n^{(0,1)}(t)}{B_n(t)} = \frac{n-3}{2t_2}$$

になる．よって，(5.3) から

$$E_\theta\left[\frac{n-3}{nT_2}\right] = \frac{1}{\sigma^2}$$

となり，また $(n-3)/(nT_2)$ は $1/\sigma^2$ の不偏推定量であり，T が θ に対する完備十分統計量であるから，それは $1/\sigma^2$ の UMVU 推定量になる．

例 5.2 $X_1, \cdots, X_n$ をたがいに独立に，いずれも p.d.f.

$$p(x;\mu,\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}e^{-(x-\mu)/\sigma} & (x > \mu), \\ 0 & (x \leq \mu) \end{cases}$$

に従う確率変数とする．ただし，$n \geq 4$ とし，$\mu \in \boldsymbol{R}^1$, $\sigma \in \boldsymbol{R}_+$ とする．このとき，$\theta := (\mu, \sigma)$ の最尤推定量は

$$\hat{\theta} := (\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = (X_{(1)}, \bar{X} - X_{(1)})$$

になる．ただし，$X_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$, $\bar{X} = (1/n)\sum_{i=1}^n X_i$ とする．ここで，$T_1 := \hat{\mu}$ の p.d.f. は

$$f_{T_1}(t_1;\mu,\sigma) = \begin{cases} \frac{n}{\sigma}\exp\{-\frac{n}{\sigma}(t_1 - \mu)\} & (t_1 > \mu), \\ 0 & (t_1 \leq \mu) \end{cases}$$

となり，$T_2 := \hat{\sigma}$ の p.d.f. は

$$f_{T_2}(t_2;\mu,\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-1)}\left(\frac{n}{\sigma}\right)^{n-1} t_2^{n-2} e^{-(n/\sigma)t_2} & (t_2 > 0), \\ 0 & (t_2 \leq 0) \end{cases}$$

となる．いま，T_1 と T_2 はたがいに独立であるから，$T = (T_1, T_2) = (\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ の j.p.d.f. は，$\theta := (\theta_1, \theta_2) = (\mu, \sigma)$ とすれば，

$$f_T(t,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-1)}\left(\frac{n}{\theta_2}\right)^n t_2^{n-2} \exp\left(-\frac{n}{\theta_2}t_1 - \frac{n}{\theta_2}t_2 + \frac{n\theta_1}{\theta_2}\right) & ((t_1, t_2) \in \mathcal{T}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

になる．ただし，$\mathcal{T} = (\mu, \infty) \times (0, \infty)$, $\theta \in \boldsymbol{R}^1 \times \boldsymbol{R}_+$ とする．いま，

$$c_{01}(\theta) = -\frac{n}{\theta_2}, \quad c_{12}(\theta) = c_{22}(\theta) = 0$$

となり，

$$E_\theta(T_1) = \mu + \frac{\sigma}{n}, \quad E_\theta(T_2) = \sigma$$

となる．また，

$$B_n(t) = t_2^{n-2}$$

より，各 $\theta \in \Theta$ と各 $t_1 \in (\mu, \infty)$ について

$$\lim_{t_2 \to 0+0} B_n(t) \exp\{A_\theta(t)\} = \lim_{t_2 \to 0+0} t_2^{n-2} \exp\left(-\frac{n}{\theta_2}t_1 - \frac{n}{\theta_2}t_2 + \frac{n\theta_1}{\theta_2}\right) = 0,$$
$$\lim_{t_2 \to \infty} B_n(t) \exp\{A_\theta(t)\} = 0$$

となるから，条件 (C2) が成り立つ．よって，定理 5.1 より

$$E_\theta\left[\frac{B_n^{(0,1)}(T)}{B_n(T)}\right] = \frac{n}{\theta_2} \tag{5.4}$$

になる．一方，

$$B_n^{(0,1)}(t) = \frac{\partial}{\partial t_2} B_n(t) = (n-2)t_2^{n-3}$$

となるから

$$\frac{B_n^{(0,1)}(t)}{B_n(t)} = \frac{n-2}{t_2}$$

になる．よって，(5.4) から $(n-2)/(nT_2)$ は $1/\theta_2 = 1/\sigma$ の不偏推定量であり，T が θ に対する完備十分統計量であるから，それは $1/\theta_2$ の UMVU 推定量になる．

上記の議論は，$B_n^{(i,j)}(t) = (\partial^{i+j}/\partial t_1^i \partial t_2^j) B_n(t)$ $(i, j = 0, 1, 2, \cdots)$ について $E_\theta[B_n^{(i,j)}(T)/B_n(T)]$ に関する等式に拡張して，同様に論じられる．

6. おわりに

本稿では，位置母数の最小分散推定において，Pitman 推定量と UMVU 推定量との関係を論じ，また，指数型分布族において UMVU 推定量の構成について論じた．後者の場合には，完備十分統計量の分布を求めることが本質的で，[VN93] において，既に分かっているものについてはかなり網羅されているが，その分布を求めることは一般には難しいことも多く，別のアプローチが必要である．

参考文献

[JD90] Jani, P.N. and Dave, H.P.(1990). Minimun variance unbiased estimation in a class of exponential family of distributions and some of its applications. *Metron* 48, 493-507.

[LC98] Lehmann, E. L. and Casella, G.(1998). *Theory of Point Estimation.* 2nd ed. Springer, New York.

[S00] 鈴木邦彦 (2000). Minimum variance unbiased estimation for the multiparameter exponential family of distributions. 数理解析研究所講究録 1161, 27-45.

[T94] 竹内啓 (1994). 統計的方法. 岩波書店.

[VN93] Voinov, V.G. and Nikulin, M.S.(1993). *Unbiased Estimators and Their Applications, Vol.1:Univariate Case.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.